数理解析研究所講究録
711巻 1989年 86-93

Positively expansive maps on graphs

筑波大数学系　川村一宏 (Kazuhiro Kawamura)

compact metric space X 上の onto map $f:X\to X$ が positively expansive であるとは、次を満たす $c>0$ (expansive constant という)が存在する事である; $\forall x\neq\forall y\in X$ に対して $n\geq 0$ があって、$d(f^n(x),f^n(y))>c$. Positively expansive map は位相力学系における重要な map の一つで、特に(位相)多様体や位相群上の positively expansive open map については、様々な結果が得られている。しかし多様体や位相群でない空間上の、必ずしも open でない positively expansive map については、あまり多くは知られていないようである。ここでは一次元 compact 多面体、即ち graph 上の positively expansive map について得られた結果について紹介する。次の定理 0.2 は基本的である。

定義 0.1. compact metric space X 上の metric d をとる。$f:X\to X$ が d に関する local expansion であるとは、次の様な $\lambda>1$ と $\delta>0$ が存在することである; 任意の $x,y\in X$ with $d(x,y)<\delta$ に対し、

$$d(f(x),f(y))\geq\lambda d(x,y).$$

定理0.2（[R]）. $f: X \to X$ に対し、

f が positively expansive $\longleftrightarrow$ f は X 上のある距離に関して local expansion

以下 G は compact connected graph とする。

1．Positively expansive map の存在する graph

まず最初にどんな graph の上に positively expansive map が存在するかについて考える。J.J. Charatonik - S. Miklos は、graph の特別な metric（convex metric と呼ばれる）に関する local expansion が存在する為の必要十分条件を与えた（[Ch-M]）。この証明を見直すと、彼らの与えた条件はそのまま positively expansive map が存在する為の必要十分条件であることがわかる。即ち、

定理1.1. graph G について次は同値.

(1) G 上の positively expansive map が存在する.

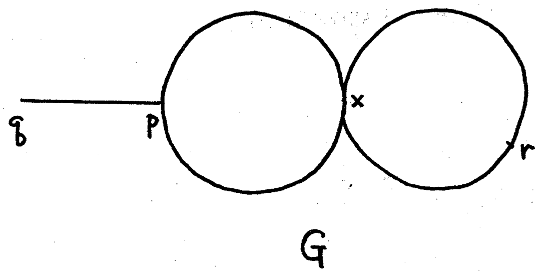
(2) 次をみたす $c \in G$ が存在する.

a) $\mathrm{ord}_c G = \max\{\mathrm{ord}_p G \mid p \in G\}$.

b) $G \setminus c$ の任意の component K に対し、$\overline{K}$ は circle を含む。

但し、$\mathrm{ord}_c G$ は c から出る（小さな）arc の数（図1）.

注） G 上に positively expansive open map が存在 $\longleftrightarrow$ $G = S^1$ は容易にわかる。



$\mathrm{ord}_q G = 1$, $\mathrm{ord}_r G = 2$, $\mathrm{ord}_x G = 4$.

図 1.

2. Positively expansive map の分類

次に、graph 上の positively expansive map を topological conjugacy によって分類することを考える。ここで

定義 2.1. $f, g : X \to X$ が topologically conjugate であるとは、homeomorphism $h : X \to X$ が存在して、$h \circ f = g \circ h$ をみたすことである。

Peano continuum (= locally connected compact connected metric space) 上の positively expansive open map については平出 [H] により良い結果が得られている。つまり semi-locally 1-connected Peano continuum 上の positively expansive open map は infra-nil-endomorphism と topologically conjugate である。この定理の証明法に（基本的には）従うことにより、次が得られる。graph G の end point の全体を E(G) で表わすことにする。

定理2.2. $f, g: G \to G$ は positively expansive map とし、$f(x_0)=x_0$, $g(y_0)=y_0$ とする。次は同値。

(1) homeomorphism $h:(G, y_0) \to (G, x_0)$ が存在して、$h \circ g = f \circ h$.

(2) homeomorphism $h:(G, y_0) \to (G, x_0)$ が存在して、$h \circ g \simeq f \circ h$ rel $\{y_0\} \cup E(G)$.

注) (1) graph 上の positively expansive map は常に fixed point を持つとは限らない([Ro])。しかし eventually periodic point を常に持つことは容易にわかる。

(2) 定理2.2,(2) の 'rel $\{y_0\} \cup E(G)$' の条件が落とせない例を、図1 の graph 上に作ることができる。

end point を持たない graph についてはもっと詳しく、

定理2.3. G を end point を持たない graph とし、$f, g: G \to G$ は positively expansive で、$f(x_0)=x_0$, $g(y_0)=y_0$ とする。基本群の間の homomorphism $\alpha: \pi_1(G, y_0) \to \pi_1(G, x_0)$ が、$f_\# \circ \alpha = \alpha \circ g_\#$ をみたせば、map $h:(G, y_0) \to (G, x_0)$ が、$h_\# = \alpha$ かつ $f \circ h = h \circ g$ をみたすように、一意的に存在する。

系2.4. $G, f, g: G \to G$ は2.3のものとするとき、次は同値。

(1) homeomorphism $h:(G, y_0) \to (G, x_0)$ があって、$f \circ h = h \circ g$.

(2) isomorphism $\alpha: \pi_1(, y_0) \longrightarrow \pi_1(G, x_0)$ があって、$f_\# \circ \alpha = \alpha \circ g_\#$.

これらの結果を証明する為に平出氏の方法を適用しようとする時、map の openness を仮定していないためにいくつかの困難があるが、それらは graph の特殊性、特に universal cover が non-compact tree である事を使って切り抜けることができる。特に次の定理を示すことが必要である。

定理2.5. $f: G \to G$ は graph G 上の positively expansive map とする。$p: \tilde{G} \to G$ を G の universal cover，$\tilde{f}: \tilde{G} \to \tilde{G}$ を f の lift とする。この時、次のような $\tilde{G}$ 上の metric ρ が存在する。

(1) $(\tilde{G}, \rho)$ は complete.

(2) 全ての covering transformation は ρ-isometry.

(3) $\lambda > 1$ が存在し、<u>任意の</u> $\tilde{x}, \tilde{y} \in G$ に対し、$\rho(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{y})) \geq$
$\geq \lambda \cdot \rho(\tilde{x}, \tilde{y})$.

3. Special POTP と Markov partition.

定義3.1. $f: X \to X$ が次の条件をみたす時、<u>Special</u> <u>POTP</u> を持つ、という。

次のような finite partition $\mathfrak{D}$ of X が存在する。

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して、任意の点列 $(x_i)_{i \geq 0}$ で $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ かつ x_{i+1}と $f(x_i)$ は $\mathfrak{D}$ のある一つの member に含まれる $(\forall i \geq 0)$

をみたすものに対して、$x\in X$ を $d(f^i(x), x_i)<\varepsilon$ $(\forall i\geq 0)$ をみたすように取ることができる。

特に $\mathcal{D}=\{X\}$ ととれるとき、f は POTP を持つという。明らかに POTP $\Longrightarrow$ special POTP であるが、逆は成立しない。pseudo-Anosov homeo がそのような例を与えている。次は容易にわかる。

命題 3.2. (well known). positively expansive map $f:X\to X$ について、
f が open $\longleftrightarrow$ f は POTP を持つ。

special POTP を持つが POTP を持たない map の class として、今までには pseudo-Anosov homeomorphism の class 以外には知られていなかった。守安 ([M]) はある graph の上の positively expansive map とその inverse limit が special POTP を持つことを示した。ここで、

定義 3.3. $f:X\to X$ に対し、f を bonding map とする X の inverse limit を $\overline{X}=\varprojlim(X,f)$ と表わす。この上に homeomorphism $\overline{f}:\overline{X}\to\overline{X}$ が、
$$\overline{f}(x_0,x_1,x_2,\cdots)=(f(x_0),x_0,x_1,x_2,\cdots)$$
によって定義される。

守安氏のアイディアを一般化することによって、次の結果を得た。

定理 3.4. graph 上の positively expansive map 及びその inverse limit は special POTP を持つ。

ある力学系が与えられた時、それを記号力学系の qoutient として表わす為の基本的な手段として Markov partition がある。

定義 3.5. $f: X \to X$ map に対し、X の subset の集合 $\mathcal{R} = \{R_1, \cdots, R_n\}$ が次をみたすとき、$\mathcal{R}$ を Markov partition という。

(1) $X = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$, 各 R_i は regularly closed.

(2) $\mathrm{int}\, R_i \cap \mathrm{int}\, R_j = \emptyset \quad i \neq j$.

(3) 各 R_i に対し、$f(R_i)$ は $\mathcal{R}$ の member の和として表わされる。

(4) 任意の $(R_{n_i})_{i \geq 0} \in \mathcal{R}^{\infty}$ に対し、$\bigcap_{i \geq 0} f^{-i}(R_{n_i})$ は高々一点.

再び [M] のアイディアを一般化し、伊達山 [D] と組み合わせることにより、次を示した。

定理 3.6. graph 上の positively expansive map 及びその inverse limit は Markov partition をもつ。

注) homeomorphism に対する Markov partition は上で与えたものと多少異なっている (特に条件 (3))。

参考文献

[Ch-M]. J.J. Charatonik - S. Miklos, On local expansion on graphs, Fund. Math. 113 (1981), 235-252.

[H] K. Hiraide, Positively expansive open maps on Peano spaces, preprint.

[K_1] K. Kawamura, Positively expansive maps on graphs, preprint.

[K_2] ________, Positively expansive maps on graphs II, preprint.

[M] K. Moriyasu, Markov partitions and special POTP, preprint.

[R] W.L. Reddy, Expanding maps on compact metric spaces, Top. and its Appl. 13 (1982), 327-334.

[R_0] I. Rosenholtz, Local expansions, derivatives and fixed points, Fund. Math. 91 (1976), 1-4.

[D] M. Dateyama, Homeomorphisms with Markov partitions, t appear in Osaka J. Math.